PART3　3 倍角の公式とその利用

3 (1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ が成り立つことを示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき $5\theta=\pi$ であることに注目して証明する。

(2)　$3\theta=2\theta+\theta$ であることに注目し，加法定理を用いて 3 倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

を証明する。また，この公式と(1)の結果から，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求める。

第 9 講　PART3　確認問題

1　次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき，$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\frac{2}{5}\pi$ の値を求めよ。

(1)　(証明)

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ より　$5\theta=2\pi$

ゆえに　$3\theta=2\pi-\boxed{\text{ア}}\theta$

よって　$\sin 3\theta=\sin\left(2\pi-\boxed{\text{ア}}\theta\right)=\boxed{\text{イ}}$

したがって　$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

(2)　(証明)

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(2\theta+\theta)\\&=\boxed{\text{ウ}}\cos\theta+\boxed{\text{エ}}\sin\theta\\&=2\sin\theta\boxed{\text{オ}}+\left(1-2\boxed{\text{カ}}\right)\sin\theta\\&=2\sin\theta\left(1-\boxed{\text{キ}}\right)+\sin\theta-2\boxed{\text{ク}}\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

(3)　$\cos\frac{2}{5}\pi=\boxed{\text{ケ}}$

[$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢]

①　$\sin 2\theta$　　②　$-\sin 2\theta$

③　$\cos 2\theta$　　④　$-\cos 2\theta$

[ウ ～ ク の選択肢]

① $\sin\theta$　② $\cos\theta$

③ $\sin 2\theta$　④ $\cos 2\theta$

⑤ $\sin^2\theta$　⑥ $\cos^2\theta$

⑦ $\sin^3\theta$　⑧ $\cos^3\theta$

[ケ の選択肢]

① $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　② $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

③ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　④ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

⑦ $\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　⑧ $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

[MEMO]

PART3　３倍角の公式とその利用

3　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(2)　等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ が成り立つことを示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$5\theta=\pi$　すなわち　$2\theta=\pi-3\theta$

よって　$\sin 2\theta=\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$　より　$\sin 2\theta=\sin 3\theta$

(2)　$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

したがって　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

この等式と，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を(1)の等式に代入して

$$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin\theta=\sin\dfrac{\pi}{5}\neq 0$ より，$(*)$の両辺を $\sin\theta$ で割って

$$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$$

$$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta)$$

$$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{5}>0$ より　$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

第９講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：②，ウ：③，エ：④，オ：⑥，
カ：⑤，キ：⑤，ク：⑦，ケ：③

[解説]

(1)　$\theta=\frac{2}{5}\pi$ より　$5\theta=2\pi$

ゆえに　$3\theta=2\pi-2\theta$

よって　$\sin 3\theta=\sin(2\pi-2\theta)=\boldsymbol{-\sin 2\theta}$ [A]

したがって　$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

(2)　$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)$

$=\boldsymbol{\sin 2\theta}\cos\theta+\boldsymbol{\cos 2\theta}\sin\theta$ [B]

$=2\sin\theta\boldsymbol{\cos^2\theta}+(1-2\boldsymbol{\sin^2\theta})\sin\theta$ [C]

$=2\sin\theta(1-\boldsymbol{\sin^2\theta})+\sin\theta-2\boldsymbol{\sin^3\theta}$ [D]

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(3)　(2)の等式と，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を [C]
(1)の等式に代入すると

$3\sin\theta-4\sin^3\theta+2\sin\theta\cos\theta=0$ ……(＊)

$\theta=\frac{2}{5}\pi$ のとき，$\sin\theta=\sin\frac{2}{5}\pi\neq 0$ であるから(＊)の両辺を $\sin\theta$ で割ると

$3-4\sin^2\theta+2\cos\theta=0$

$3-4(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta=0$ [D]

$4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$

よって　$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\frac{2}{5}\pi<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta=\cos\frac{2}{5}\pi>0$ であるから

$$\cos\frac{2}{5}\pi=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

[A]　$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

[B]　加法定理
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

[C]　２倍角の公式
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha$
$=2\cos^2\alpha-1$

[D]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$